۲۲. گزینه «۴»

$$\begin{cases} A_2=[-2,\frac{7}{2}] \Rightarrow A_2\cap A_5=[-2,2] \\ A_5=[-5,2] \end{cases} \Rightarrow (A_2\cap A_5)-(A_1\cap A_7)=[-2,2]-[-1,1]=[-2,-1)\cup(1,2]$$

$$\begin{cases} A_1=[-1,4] \Rightarrow A_1\cap A_7=[-1,1] \\ A_7=[-7,1] \end{cases}$$

۲۳. گزینه «۲»

$$A_1=\{-1,0,1,\dots,7\}$$
$$A_2=\{-2,-1,0,\dots,6\}$$
$$\vdots$$
$$A_8=\{-8,-7,\dots,0\}$$
$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{8} A_i-\bigcap_{i=1}^{8} A_i=\{-8,-7,-6,\dots,7\}-\{-1,0\}=\{-8,-7,\dots,-2,1,\dots,7\}$$

این مجموعه ۱۴ عضو دارد.

۲۴. گزینه «۳»

نکته۱ (قوانین جذب):

$$\begin{cases} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{cases}$$

نکته۲ (خواص شرکت‌پذیری اجتماع و اشتراک در مجموعه‌ها):

$$\begin{cases} A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \end{cases}$$

$$A-B=A\cup B \Rightarrow A\cap B'=A\cup B \Rightarrow (A\cap B')\cap B=(A\cup B)\cap B$$

$$\xrightarrow[\text{تساوی و خاصیت جذب در سمت چپ}]{\text{خاصیت شرکت‌پذیری در سمت راست}} A\cap(B'\cap B)=B \Rightarrow A\cap\varnothing=B \Rightarrow \varnothing=B$$

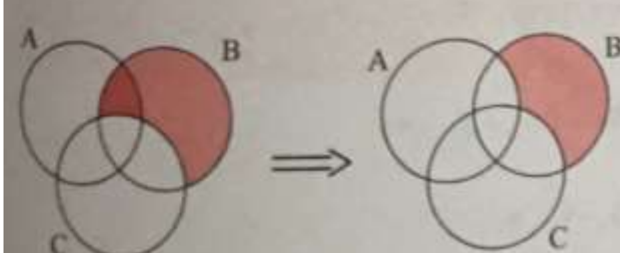
۲۵. گزینه «۴»

نکته (خاصیت توزیع‌پذیری تفاضل روی اجتماع): $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$

$$(C-D)\cup(C-A)\cup(C-B) \xlongequal{\text{شرکت‌پذیری}} (C-D)\cup((C-A)\cup(C-B))$$
$$\xlongequal[\text{تفاضل روی اجتماع}]{\text{عکس عمل توزیع پذیری}} (C-D)\cup[C-(A\cup B)] \xlongequal{\text{بنابه فرض } A\cup B=D}$$
$$(C-D)\cup(C-D)=C-D \xlongequal[D,C]{\text{با جایگذاری}} (A\cap B)-(A\cup B)$$
$$=(A\cap B)\cap(A\cup B)' \xlongequal{\text{دمورگان}} (A\cap B)\cap(A'\cap B')=(A\cap A')\cap(B\cap B')=\varnothing$$

۲۶. گزینه «۴»

گزینه‌های اول تا سوم ناحیه هاشور زده را مشخص می‌کنند. امّا در گزینهٔ چهارم داریم:



$(B-C)$ $\qquad$ $(B-C)-A$

۳۷ گزینه «۱»

$$(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)=(A\cap B\cap C')-(A\cap B\cap C)$$
$$\xrightarrow{A\subseteq B}(A\cap C')-(A\cap C)=(A\cap C')\cap(A\cap C)'\xrightarrow{\text{دمورگان}}(A\cap C')\cap(A'\cup C')$$
$$\xrightarrow[\text{روی اجتماع}]{\text{توزیع‌پذیری اشتراک}}\underbrace{(A\cap C'\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap C'\cap C')=A\cap C'$$

۳۸ گزینه «۳»

$$A-B=B-A\Rightarrow A\cap B'=B\cap A'$$

به طرفین فرض $A\cap B$ را اجتماع می‌کنیم، آن‌گاه:

$$(A\cap B)\cup(A\cap B')=(A\cap B)\cup(B\cap A')\Rightarrow A\cap(B\cup B')=B\cap(A\cup A')\Rightarrow A\cap U=B\cap U\Rightarrow A=B$$

۳۹ گزینه «٤»

گزینه «۱»: $B\cap(B\cap A')'=A\Rightarrow B\cap(B'\cup A)=A\Rightarrow(B\cap B')\cup(B\cap A)=A\Rightarrow\varnothing\cup(B\cap A)=A\Rightarrow A\subseteq B$

گزینه «۲»: $B'\subseteq A'\Rightarrow B'\cap A'=B'\Rightarrow(B'\cap A')'=B\xrightarrow{\text{دمورگان}}B\cup A=B\Rightarrow A\subseteq B$

گزینه «۳»: $A-B=\varnothing\Rightarrow B\cup(A-B)=B\cup\varnothing\Rightarrow B\cup(A\cap B')=B$

$$\Rightarrow(B\cup A)\cap(B\cup B')=B\Rightarrow(B\cup A)\cap U=B\Rightarrow B\cup A=B\Rightarrow A\subseteq B$$

بنابراین هر سه گزینه «۱» و (۲) و (۳) درست هستند.

٤۰ گزینه «٤»

$$(B'-A')'\cup B=(B'\cap A)'\cup B\xrightarrow{\text{دمورگان}}(B\cup A')\cup B\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(B\cup B)\cup A'=B\cup A'$$

که متمم آن به‌صورت روبه‌رو است: $(B\cup A')'=B'\cap A=B'-A'$

٤۱ گزینه «۲»

$$(C\cup A'\cup B')'\xrightarrow{\text{تعمیم دمورگان}}C'\cap A\cap B=A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)=(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) برابر هستند. از طریق نمودار ون نیز به سادگی قابل بررسی است.

٤۲ گزینه «۲»

نکته **اگر حداقل یکی از دو مجموعهٔ A و B نامتناهی باشند، اجتماع آن‌ها نامتناهی و اگر حداقل یکی از دو مجموعه متناهی باشد، اشتراک آن‌ها متناهی است.**

گزینه «۱»: متناهی $A\Rightarrow$ نامتناهی $A'\Rightarrow A'\cup B'$ نامتناهی

گزینه «۲»: متناهی $A\Rightarrow A\cap B'$ متناهی

گزینه «۳»: زیرمجموعه نامتناهی $B\Rightarrow$ می‌تواند نامتناهی باشد $B'\Rightarrow B'\cup A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد

گزینه «۴»: نامتناهی A' و B' هم می‌تواند نامتناهی باشد $\Rightarrow A'\cap B'$ می‌تواند نامتناهی باشد.

توجه کنید برای رد گزینه‌های ۳ و ۴ می توانیم $A=\{2,4\}$ و مجموعه B را اعداد طبیعی فرد در نظر بگیریم.

گزینه «۳»

افراد بیکار $۵۵۰۰۰۰۰۰ - ۳۵۰۰۰۰۰۰ = ۲۰۰۰۰۰۰۰$

نرخ بیکاری $\dfrac{n(A')}{n(U)} = \dfrac{۲۰۰۰۰۰۰۰}{۵۵۰۰۰۰۰۰} = \dfrac{۲۰}{۵۵} = \dfrac{۴}{۱۱} \Rightarrow$ درصد نرخ بیکاری $= \dfrac{۴}{۱۱} \times ۱۰۰ = \dfrac{۴۰۰}{۱۱} = ۳۶/۳$

گزینه «۱»

$$[(B-A)'-A]' = [(B\cap A')'\cap A']' = (B\cap A')\cup A = B\cup A$$

با توجه به نمودار ون نیز می‌توان نشان داد که $A\cup B$ جواب است.

گزینه «۴»

$$(A\cap B')-(B-A) = (A-B)-(B-A) = A-B$$

گزینه «۴»

می‌دانیم $A-(A-B) = A\cap B$ چون:

$$A-(A-B) = A\cap(A\cap B')' = A\cap(A'\cup B) = \overbrace{(A\cap A')}^{\varnothing}\cup(A\cap B) = A\cap B$$

پس:

$$[A-(A-B)]\cup(A\cap B)' = (A\cap B)\cup(A\cap B)' = U$$

پس متمم این مجموعه برابر $\varnothing$ است.

گزینه «۱»

$$[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)] = A'\cap[(B\cap A)\cup(B\cap A')] = A'\cap[B\cap(A\cup A')] = A'\cap[B\cap U] = A'\cap B = A'-B'$$

گزینه «۱»

$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A' = (A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap A' = (A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap A' = ((A'\cap A)\cup B)\cap A'$$
$$= (\varnothing\cup B)\cap A' = B\cap A' = B-A$$

گزینه «۴»

$$(A-B)\cup(B\cap A') = (A\cap B')\cup(B\cap A') = ((A\cap B')\cup B)\cap((A\cap B')\cup A') = ((B\cup A)\cap(B\cup B'))\cap((A'\cup A)\cap(A'\cup B'))$$
$$= ((B\cup A)\cap U)\cap(U\cap(A'\cup B')) = (B\cup A)\cap(A'\cup B')$$

گزینه «۱»

$$[(A\cup(A\cup B)')\cap B]\cup A = [(A\cup(A'\cap B'))\cap B]\cup A = [\overbrace{(A\cup A')}^{U}\cap(A\cup B')\cap B]\cup A = [(A\cup B')\cap B]\cup A$$
$$= [(A\cap B)\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]\cup A = (A\cap B)\cup A \xlongequal{\text{قاعدهٔ جذب}} A$$

گزینه «۲»

نکته (تفاضل متقارن)

$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

$A\Delta B = \{۲,۳,۶,۷\}$

$(A\Delta B)\Delta C = \{۲,۳,۶,۷\}\Delta\{۳,۵,۷,۸\} = \{۲,۶,۵,۸\}$

که همان گزینهٔ «۲» است.

۵۲. گزینه «۳»

$$A'\Delta B'=(A'-B')\cup(B'-A')=(A'\cap B)\cup(B'\cap A)=(B\cap A')\cup(A\cap B')=(B-A)\cup(A-B)=A\Delta B$$

۵۳. گزینه «۲»

$$[(A'\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(A\Delta B)]\xrightarrow{\text{عکس دمرگان}}[(A\cup B)\cap(A\cap B)']'\cup(A\Delta B)=[\underbrace{(A\cup B)-(A\cap B)}_{A\Delta B}]'\cup(A\Delta B)$$

$$=(A\Delta B)'\cup(A\Delta B)=U$$

۵۴. گزینه «۴»

$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=A\Rightarrow(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\Rightarrow(A\cap B')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B)=A$$

$$\Rightarrow(A\cap(B\cup B'))\cup(B\cap A')=A\Rightarrow(A\cap U)\cup(B\cap A')=A\Rightarrow A\cup(B\cap A')=A\Rightarrow(A\cup B)\cap(A\cup A')=A$$

$$\Rightarrow(A\cup B)\cap U=A\Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow B\subset A\Rightarrow B\cap A'=B-A\xlongequal{B\subset A}\varnothing$$

۵۵. گزینه «۴»

$$\underbrace{(A\cap B)\cup(A\cap B')}_{A\cap(\underbrace{B\cup B'}_{U})=A}\cup(B\cap A')=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{U}=A\cup B=B$$

۵۶. گزینه «۱»

$$A\cap B'=B\cap A'\Rightarrow A-B=B-A\Rightarrow A=B\Rightarrow(A\Delta B)-A=A-A=\varnothing$$

۵۷. گزینه «۲»

$$A_1=(0,1)\ ,\ A_2=(-1,\frac{1}{2})\ ,\ A_3=(-2,\frac{1}{3})\ ,\ A_4=(-3,\frac{1}{4})\ ,\ A_5=(-4,\frac{1}{5})$$

$$A=\bigcup_{n=1}^{5}A_n=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=(-4,1)$$

$$B=\bigcap_{n=1}^{5}A_n=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_5=(0,\frac{1}{5})$$

$$\Rightarrow A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=(-4,1)-(0,\frac{1}{5})=(-4,0]\cup[\frac{1}{5},1)$$

۵۸. گزینه «۴»

$b\notin A\Rightarrow\{a,b\}\not\subseteq A\Rightarrow$ گزینهٔ چهارم نادرست است.

۵۹. گزینه «۳»

$A-\{B\}=\{a,b,\{a\}\}\Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی سره $=2^3-1-1=6$

۶۰. گزینه «۳»

نکته اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n است.

$$A_3=\{m:m\geq-3\ ,\ 2^m\leq3\}=\{0,1,-1,-2,-3\}$$

$$A_4=\{m:m\geq-4\ ,\ 2^m\leq4\}=\{0,1,-1,-2,-3,-4\}\Rightarrow A_4\cap A_3=\{0,1,-1,-2,-3\}$$

این مجموعه ۵ عضوی است پس $32=2^5$ زیرمجموعه دارد.

۶۱ گزینه «۴»

نکته **به مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A ، مجموعه توانی A می‌گویند و با P(A) نمایش می‌دهند.**

$A=\{a,\{a\},\{a,b\}\}\Rightarrow P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{\{a,b\}\},\{a,\{a\}\},\{a,\{a,b\}\},\{\{a\},\{a,b\}\},A\}$

بنابراین تنها گزینهٔ درست گزینهٔ چهارم است یعنی $\{a,\{a,b\}\}\in P(A)$

۶۲ گزینه «۳»

$A=\{a,b,c\}\Rightarrow P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$\Rightarrow P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{\{c\}\},\{\{a\},\{a,b\}\},...\}$

بنابراین تنها گزینهٔ نادرست گزینهٔ سوم است. زیرا عضوی به شکل $\{\{\varnothing\},\{\varnothing\}\}$ در $P(P(A))$ وجود ندارد.

۶۳ گزینه «۲»

چون A یک مجموعه دوعضوی است پس فرض می‌کنیم $A=\{a,b\}$. لذا:

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$P(A)-\{\varnothing\}=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\Rightarrow n(P(A)-\{\varnothing\})=۳\Rightarrow n(P(P(A)-\{\varnothing\}))=۲^۳=۸$

پس مجموعهٔ $P(P(A)-\{\varnothing\})$ دارای ۸ عضو و درنتیجه $۲^۸=۲۵۶$ زیرمجموعه است.

۶۴ گزینه «۴»

با توجه به قضیه دمورگان و بنابر تعریف تفاضل داریم:

$(B\cup A')'\cup(B'\cup A)'=(B'\cap A)\cup(B\cap A')=(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)=A\Delta B$

از طرفی $A\cap B=\varnothing$ درنتیجه $n(A\Delta B)=۳$ و مجموعه توانی آن $۸=۲^۳$ عضو دارد.

۶۵ گزینه «۴»

اگر A یک مجموعه دلخواه باشد همواره $\varnothing\in P(A)$ می‌باشد. با توجه به این نکته $\varnothing\in P(A-B)$ و چون $\varnothing\in P(A)$ و $\varnothing\in P(B)$ نتیجه می‌گیریم $\varnothing\notin P(A)-P(B)$ پس امکان تساوی $P(A-B)=P(A)-P(B)$ وجود ندارد.

۶۶ گزینه «۴»

گزینه «۱»: نادرست است. چون $\{\varnothing\}\in A$

گزینه «۲»: نادرست است. چون $A-\varnothing=A$

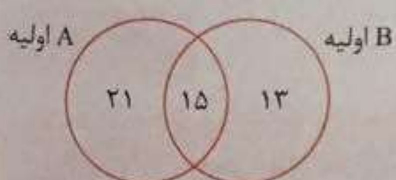
گزینه «۳»: نادرست است. چون مجموعهٔ توانی $۸=۲^۳=۲^n$ عضو دارد.

گزینه «۴»: درست است.

$A-\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۶۷ گزینه «۳»

اگر بخواهیم مجموعه‌های A و B را در نمودار ون نمایش دهیم با توجه به ۱۵ عضو مشترک آن‌ها خواهیم داشت:



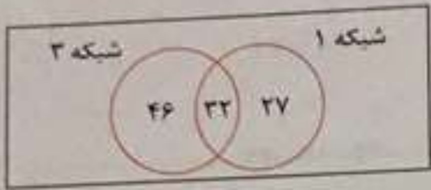
حال اگر ۱۶ عضو از مجموعهٔ A حذف کنیم، از اشتراک ۹ عضو و از غیرمشترک‌ها ۷ عضو حذف خواهد شد.

پس:

$\Rightarrow n(A_{\text{جدید}}\cup B_{\text{اولیه}})=n(A_{\text{جدید}})+n(B)-n(A_{\text{جدید}}\cap B)=۲۰+۲۸-۶=۴۲$

۶۸. گزینه «۴»

این ۱۱۰ نفر بیننده را در نمودار ون نمایش می‌دهیم. ابتدا اشتراک دو مجموعه و سپس سایر قسمت‌ها را مشخص می‌کنیم.



فقط شبکه ۱ $\Rightarrow 59-32=27$ و فقط شبکه ۳ $\Rightarrow 78-32=46$

هیچ کدام از دو شبکه را نمی‌بینند $110-(46+32+27)=110-105=5$

$$\Rightarrow \frac{\text{تعداد افرادی که حداقل یکی از دو شبکه را می‌بینند}}{\text{تعداد افرادی که هیچ‌کدام از دو شبکه را نمی‌بینند}}=\frac{105}{5}=21$$

۶۹. گزینه «۲»

تعداد افرادی که حداقل عضو یکی از دو المپیاد هستند. $36-6=30$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow 30=12+24-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=6$

۷۰. گزینه «۳»

حداقل در یکی از دو کلاس شرکت کرده‌اند. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=35+31-23=43$

تعداد افرادی که در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت نکرده‌اند. $\Rightarrow 51-43=8$

۷۱. گزینه «۱»

تعداد افرادی که حداقل عضو یکی از گروه‌ها هستند. $37-6=31$

تعداد افراد مشترک $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow 31=21+15-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=5$

$\Rightarrow$ تعداد دانش‌آموزان فقط عضو گروه سرود $=15-5=10$

۷۲. گزینه «۲»

$n(F)=22,\ n(B)=18,\ n(V)=17,\ n(F\cap B)=8,\ n(F\cap V)=7,\ n(B\cap V)=6$

$n(F\cup B\cup V)=n(F)+n(B)+n(V)-n(F\cap V)-n(F\cap B)-n(V\cap B)+n(F\cap B\cap V)$

$\Rightarrow 40=22+18+17-8-7-6+n(F\cap B\cap V)\Rightarrow n(F\cap B\cap V)=4$

۷۳. گزینه «۳»

$n(F\ \text{فقط})=n(F)-n(F\cap B)-n(F\cap V)+n(F\cap V\cap B)=22-8-7+4=11$

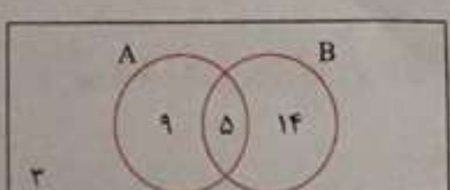
$n(B\ \text{فقط})=18-8-6+4=8$

$n(V\ \text{فقط})=17-7-6+4=8$

تعداد افرادی که فقط در یک تیم بازی کرده‌اند $=11+8+8=27$

۷۴. گزینه «۲»

با کمک نمودار ون داریم:



$\Rightarrow n(A\ \text{فقط})+n(B\ \text{فقط})=9+14=23$

۷۵. گزینه «۲»

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ بین ۱۵۰ و ۵۰۰ = ۴۹۹ ⌊۷ (۷۱) − ۱۵۰ ⌊۷ (۲۱) =۷۱−۲۱=۵۰

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۱۱ بین ۱۵۰ و ۵۰۰ = ۴۹۹ ⌊۱۱ (۴۵) − ۱۵۰ ⌊۱۱ (۱۳) =۴۵−۱۳=۳۲

تعداد اعداد که هم بر ۷ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیرند = ۴۹۹ ⌊۷۷ (۶) − ۱۵۰ ⌊۷۷ (۱) =۶−۱=۵

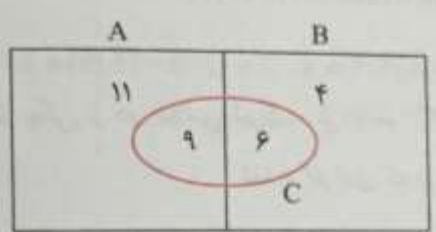
⇐ تعداد اعداد بین ۱۵۰ و ۵۰۰ که بر ۷ یا ۱۱ بخش‌پذیرند = ۵۰+۳۲−۵=۷۷

⇐ تعداد اعداد بین ۱۵۰ و ۵۰۰ که نه بر ۷ و نه بر ۱۱ بخش‌پذیرند = (۴۹۹−۱۵۰)−۷۷=۲۷۲

۷۶. گزینه «۳»

$n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(s)-n(A\cup B)=n(s)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=۷۲-(۲۳+۱۲-۸)=۴۵$

۷۷. گزینه «۲»



A= مجموعه مردان

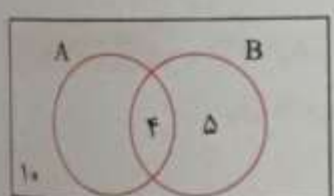
B= مجموعه زنان

C= مجموعه افراد متأهل

B−C= مجموعه زنان مجرد

$\Rightarrow n(B-C)=۴$

۷۸. گزینه «۴»



$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۵=۹-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۴$

$A\Delta B'=(A-B')\cup(B'-A)=(A\cap B)\cup(B'\cap A')$

$\Rightarrow n(A\Delta B')=n(A\cap B)+n(B'\cap A')=۴+۱۰=۱۴$

توجه کنید دو مجموعه $A\cap B$ و $A'\cap B'$ دومجموعه جدا از هم هستند.

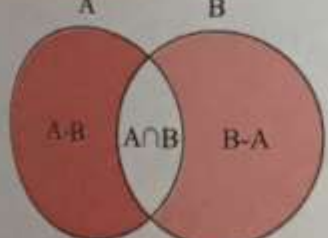
۷۹. گزینه «۲»

می‌دانیم:

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

حال با توجه به نمودار ون مقابل داریم:

$(A\Delta B)-B=A-B$



پس کافی است $n(A-B)$ را محاسبه کنیم. همچنین واضح است که:

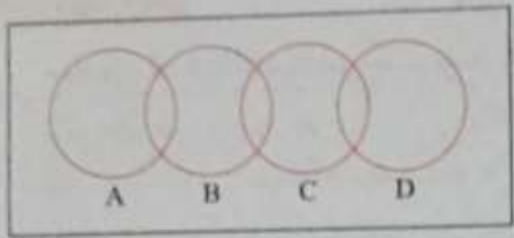
$A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

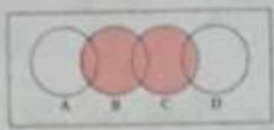
و چون $(A-B)$ و $(A\cap B)$ و $(B-A)$ دو به دو جدا از هم هستند خواهیم داشت:

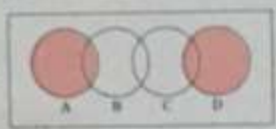
$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)\Rightarrow ۱۸=n(A-B)+۴+۹\Rightarrow n(A-B)=۵$

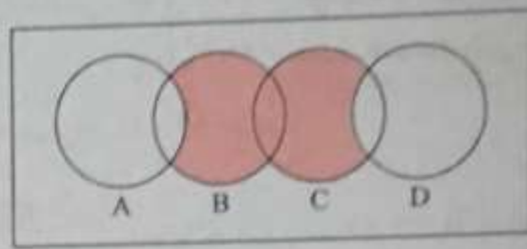
۸۰ گزینه «۳»

با توجه به شکل مسأله داریم:



$B\cup C=$ 

$A\cup D=$ 

$\Rightarrow (B\cup C)-(A\cup D)=$ 

(*)

با توجه به مطالب بالا، برای تعیین تعداد عضوهای مجموعه $A\cup B\cup C\cup D$ کافی است دو مجموعه‌های A و D را به مجموعه (*) اضافه کنیم یعنی:

$$n(A\cup B\cup C\cup D)=n(A)+n(D)+n((B\cup C)-(A\cup D))$$

۸۱ گزینه «۳»

$$a_۱=۴=۳\times۱+۱$$
$$a_۲=۷=۳\times۲+۱$$
$$a_۳=۱۰=۳\times۳+۱$$
$$\vdots$$
$$a_n=۳n+۱\Rightarrow a_{۲۰}=۳\times۲۰+۱=۶۱$$

۸۲ گزینه «٤»

مرحله (۱) : مربع ۵ $=۴(۱)+۱$

مرحله (۲) : مربع ۹ $=۴(۲)+۱$

مرحله (۳) : مربع ۱۳ $=۴(۳)+۱$

$\vdots$

مرحله (۲۰) : تعداد مربع $=۴(۲۰)+۱=۸۱$

۸۳ گزینه «۳»

نکته در بعضی از الگوهای داده شده برای یافتن یک رابطه میان الگوها باید آن‌ها را به‌صورت دو یا چند بخش مجزا الگویابی کنیم.

الگوی قسمت داخل کادر : ۱,۴,۹,... $\Rightarrow$ شکل nاُم $=n^۲$

الگوی دایره‌های کناری : ۰,۲,۶,... $\Rightarrow$ شکل nاُم $=n(n-۱)$

$\Rightarrow$ الگوی نهایی $=n^۲+n(n-۱)$ $\Rightarrow$ شکل نهم $=۹^۲+۹(۹-۱)=۱۵۳$

۸۴ گزینه «۳»

همان‌طور که از الگو مشخص است در جملات با شماره زوج تعداد دایره‌های سیاه و سفید برابر است و در جملات با شماره فرد تعداد دایره‌های سیاه یکی بیش‌تر از دایره‌های سفید است.

$n=۹ \longrightarrow$ تعداد کل دایره‌ها $=۸۱ \Rightarrow$ تعداد دایره‌های سیاه $=۴۱$

۸۵. گزینه «۳»

همان‌طور که از الگو مشخص است تعداد نقطه‌های توپرِ شکل اول و دوم با هم مساوی است. همین‌طور تعداد نقطه‌های توپر شکل‌های سوم و چهارم و ...

تعداد نقطه‌های توپرِ شکل اول و دوم $=1$
تعداد نقطه‌های توپرِ شکل سوم و چهارم $=4=2^2$
تعداد نقطه‌های توپ شکل پنجم و ششم $=9=3^2$

$\Rightarrow$ تعداد نقطه‌های توپُر در شکل‌های $(2n-1)$ و $2n$ برابر n^2 می‌باشند.

به این ترتیب تعداد نقطه‌های توپر در شکل‌های هفدهم و هجدهم برابر $81=9^2$ است.

$2(9)-1 \qquad 2(9)$

۸۶. گزینه «۳»

در شکل‌های اول و دوم تعداد دایره‌های توپر برابر ۱، در شکل‌های سوم و چهارم برابر ۵+۱ و در شکل‌های پنجم و ششم برابر ۹+۵+۱ می‌باشد. یعنی در شکل‌های شماره $(2n-1)$ و $(2n)$ تعداد دایره‌های توپر از دو شکل قبلی به اندازهٔ $(2n-1)$ اُمین عدد فرد بیش‌تر است.
پس در شکل نوزدهم تعداد دایره‌های توپر به اندازهٔ نوزدهمین عدد فرد از شکل‌های هفدهم و هجدهم بیش‌تر است. یعنی به اندازهٔ $2\times19-1=37$ تا دایره شکل‌های هفدهم و نوزدهم اختلاف دارند.

۸۷. گزینه «۴»

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^1+1},\ \frac{3}{5}=\frac{3}{2^2+1},\ \frac{5}{9}=\frac{5}{2^3+1}\Rightarrow a_n=\frac{2n-1}{2^n+1}\Rightarrow a_{10}=\frac{19}{2^{10}+1}=\frac{19}{1025}$$

۸۸. گزینه «۳»

$$2,\frac{7}{5},\frac{10}{10},\frac{13}{17},\dots\Rightarrow\frac{4}{2},\frac{7}{5},\frac{10}{10},\frac{13}{17},\dots$$

صورت کسر $=3n+1$
مخرج کسر $=n^2+1$

$$\Rightarrow a_n=\frac{3n+1}{n^2+1}\Rightarrow a_{12}=\frac{37}{145}$$

۸۹. گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l}2=1\times2^1\\8=2\times2^2\\24=3\times2^3\end{array}\right\}\Rightarrow a_n=n\times2^n\Rightarrow a_8-a_7=8\times2^8-7\times2^7=2^7(16-7)=1152$$

۹۰. گزینه «۲»

$$2,5,10,17,\dots\Rightarrow1^2+1,\ 2^2+1,\ 3^2+1,\ 4^2+1,\dots\Rightarrow a_n=n^2+1\Rightarrow a_8+a_9=(8^2+1)+(9^2+1)=65+82=147$$

۹۱. گزینه «۱»

$$a_{3n-2}=\frac{n+1}{n^2-2}\Rightarrow a_n=?$$

اگر $t=3n-2$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$3n-2=t\Rightarrow n=\frac{t+2}{3}\Rightarrow a_t=\frac{\frac{t+2}{3}+1}{\left(\frac{t+2}{3}\right)^2-2}=\frac{\frac{t+2+3}{3}}{\frac{t^2+4t+4}{9}-2}\Rightarrow a_t=\frac{\frac{t+5}{3}}{\frac{t^2+4t-14}{9}}=\frac{3t+15}{t^2+4t-14}\Rightarrow a_n=\frac{3n+15}{n^2+4n-14}$$

۹۲ گزینه «۲»

$$a_n = \frac{2n^2+2+10}{n^2+1} = \frac{2(n^2+1)+10}{n^2+1} = 2 + \frac{10}{n^2+1}$$

برای این‌که جملات دنبالهٔ a_n اعدادی صحیح شوند باید $\frac{10}{n^2+1} \in Z$ باشد یعنی n^2+1 مقسوم‌علیه ۱۰ شود.

$$n=1 \Rightarrow \frac{10}{1^2+1} = 5 \in Z \quad و \quad n=2 \Rightarrow \frac{10}{2^2+1} = 2 \in Z \quad و \quad n=3 \Rightarrow \frac{10}{3^2+1} = 1 \in Z$$

بنابراین دنبالهٔ a_n سه جملهٔ صحیح دارد.

۹۳ گزینه «۲»

باید n را طوری بیابیم که $a_n < 0$. پس قرار می‌دهیم.

$$n^2 - 24n + 80 < 0 \Rightarrow (n-20)(n-4) < 0 \Rightarrow 4 < n < 20 \Rightarrow n = 5, 6, \dots, 19 \Rightarrow \text{تعداد} = 19-5+1 = 15$$

۹۴ گزینه «۱»

$$a_1 = (\frac{3}{7})^2 \,,\, a_2 = (-\frac{3}{7})^3 \,,\, a_3 = (\frac{3}{7})^4 \,,\, a_4 = (-\frac{3}{7})^5 \,,\, \dots$$

همان‌طور که می‌بینیم جملات فرد همگی اعدادی مثبت هستند و از میان جملات زوج که منفی هستند کوچک‌ترین جمله $a_2 = (-\frac{3}{7})^3$ است.

۹۵ گزینه «۴»

می‌دانیم $(-1)^n$ به ازای n های فرد مقداری منفی است. از طرفی به ازای n های فرد بزرگ‌تر از ۱۰ عبارت $\frac{3n+4}{2n-19}$ مقداری مثبت است.

پس:

$$n = 2k+1 \;;\; K \geq 5 \Rightarrow (-1)^n \frac{3n+4}{2n-19} < 0$$

۹۶ گزینه «۲»

$$a_n = \frac{n}{(n+2)(n+32)} = \frac{n}{n^2+34n+64} = \frac{1}{n+34+\frac{64}{n}} \Rightarrow a_n = \frac{1}{(\sqrt{n}-\frac{8}{\sqrt{n}})^2+16+34} = \frac{1}{(\sqrt{n}-\frac{8}{\sqrt{n}})^2+50}$$

پس a_n وقتی ماکزیمم است که $\sqrt{n} - \frac{8}{\sqrt{n}} = 0$ یعنی $n = 8$ باشد در این صورت $a_n = \frac{1}{50} = 0/02$ بزرگ‌ترین جمله دنباله است.

۹۷ گزینه «۲»

$$a_1a_2a_3 \dots a_n = (2n-1)! \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_1a_2a_3 \dots a_n a_{n+1}}{a_1a_2a_3 \dots a_n} = \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = (2n+1)(2n) \Rightarrow a_{n+1} = (2n+1)(2n) \xrightarrow{n=4} a_5 = 9 \times 8 = 72$$

۹۸ گزینه «۳»

$$\begin{cases} x = 0/5454\dots54 \\ 100x = 54/5454\dots54 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق دو رابطه}} 99x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11} = \frac{a}{b} \Rightarrow a+b = 6+11 = 17$$

۹۹ گزینه «۳»

دنبالهٔ اعداد مفروض به عدد ثابت $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ نزدیک می شوند.

پس دنبالهٔ تفاضل این اعداد از عدد ثابت چنین است:

$$\frac{4}{3} - \frac{13}{10} = \frac{1}{30} \,,\, \frac{4}{3} - \frac{133}{100} = \frac{1}{300} \,,\, \frac{4}{3} - \frac{1333}{1000} = \frac{1}{3 \times 10^3}$$

پس جملهٔ دهم به صورت $\frac{1}{3} \times 10^{-10}$ می‌باشد.

۱۰۰. گزینه «۱»

$$A=۱+\frac{۴۵}{۹۹}=\frac{۱۴۴}{۹۹}\Rightarrow\frac{۱}{A}=\frac{۹۹}{۱۴۴}=۰/۶۸۷۵$$

۱۰۱. گزینه «۲»

$$\begin{array}{l|l} ۵۰ & ۱۱ \\ \cline{2-2} \underline{۴۴} & ۰/۴۵۴۵... \\ ۶۰ & \\ \underline{۵۵} & \\ ۵۰ & \\ \underline{۴۴} & \\ ۶۰ & \end{array}$$

جملات دنباله: ۰/۴ , ۰/۴۵ , ۰/۴۵۴ , ۰/۴۵۴۵ , ۰/۴۵۴۵۴ , ۰/۴۵۴۵۴۵ , ۰/۴۵۴۵۴۵۴ , ۰/۴۵۴۵۴<u>۵۴۵</u>

$\Rightarrow$ مجموع سه رقم سمت راست $=۵+۴+۵=۱۴$

۱۰۲. گزینه «۱»

نکته اگر سه عدد a,b,c تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند آنگاه $۲b=a+c$

$$\Rightarrow ۲x^۲=۳x+۲+۲x+۵\Rightarrow ۲x^۲-۵x-۷=۰\Rightarrow x_۱=۳/۵\ ,\ x_۲=-۱\Rightarrow x_۱+x_۲=۲/۵$$

۱۰۳. گزینه «۲»

$$۲a^۲=۲a+۱+۳a+۲\Rightarrow ۲a^۲-۵a-۳=۰\Rightarrow a=۳\ ,\ -\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{دنبالهٔ حسابی}\begin{cases}۷,۹,۱۱,...\Rightarrow d=۲\\ ۰,\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},...\Rightarrow d=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

۱۰۴. گزینه «۲»

نکته اگر سه عدد c,b,a تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند b واسطهٔ حسابی میان c,a نام دارد و $۲b=a+c$ است.

$$۱-\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=۱-\sqrt[۳]{(\sqrt{۲})^۳}=۱-\sqrt{۲}$$

$$\left(\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{(۲+\sqrt{۲})^۲}{۴-۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}+۱\Rightarrow ۲b=۱-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+۱\Rightarrow b=۱\quad \text{واسطهٔ حسابی}$$

۱۰۵. گزینه «۲»

دنبالهٔ $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},۱,...$ یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $\frac{۱}{۴}$ و قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ است. پس جملهٔ دهم برابر است با:

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d=\frac{۱۰}{۴}=۲\frac{۱}{۲}$$

۱۰۶. گزینه «۳»

$$a_۶=a_۱+۵d\xrightarrow{\text{در حالت جدید}}a'_۶=a_۱+۵d'\xrightarrow{d'=d-۲}a'_۶=a_۱+۵(d-۲)=\underbrace{a_۱+۵d}_{a_۶}-۱۰=a_۶-۱۰$$

۱۰۷. گزینه «۲»

روش اول:

$$۴,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,۲۷\Rightarrow\begin{cases}a_۱=۴\\ a_۶=۲۷\Rightarrow \overset{۴}{a_۱}+۵d=۲۷\Rightarrow d=۴/۶\end{cases}$$

روش دوم:

نکته اگر بین دو عدد a و b، تعداد m واسطهٔ حسابی درج کنیم، قدر نسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با:

$$d=\frac{b-a}{m+1}$$

$$\Rightarrow d=\frac{b-a}{m+1}\Rightarrow d=\frac{۲۷-۴}{۴+۱}=\frac{۲۳}{۵}=۴/۶$$

۱۰۸. گزینه «۳»

$$9, \bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc, 74$$

$$a_n - a_1 = 74 - 9 = 65 \Rightarrow a_1 + (n-1)d - a_1 = 65 \Rightarrow (n-1)d = 65 \Rightarrow d = \frac{65}{n-1} \quad (1)$$

$$a_{n-1} - a_2 = 36 \Rightarrow (a_1 + (n-2)d) - (a_1 + d) = 36 \Rightarrow (n-3)d = 36 \xrightarrow{\text{جایگذاری } (1)} (n-3) \times \frac{65}{n-1} = 36$$

$$\Rightarrow 5n - 15 = 3n - 3 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6 \xrightarrow{(1)} d = \frac{65}{6-1} = 13 \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d = 9 + 39 = 48$$

۱۰۹. گزینه «۱»

$2(2+a) = (1-a) + (1+2a) \Rightarrow a = -2 \Rightarrow$ دنبالهٔ اصلی : $3, 0, -3$

اگر جملات دنبالهٔ حسابی فوق را در عدد حقیقی K ضرب کنیم، دنبالهٔ حسابی جدید زیر به‌دست می‌آید:

$$3K, 0, -3K \Rightarrow d' = 0 - 3K = -3K = 27 \Rightarrow K = -9$$

۱۱۰. گزینه «۳»

نکته اگر جملات mاُم و nاُم دنبالهٔ حسابی برابر a_m و a_n باشند، آن‌گاه قدر نسبت دنباله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$d = \frac{t_{11} - t_6}{11 - 6} = \frac{30 - 20}{5} = 2$$

$$t_6 = 20 \Rightarrow t_1 + 5d = 20 \Rightarrow t_1 + 5(2) = 20 \Rightarrow t_1 = 10 \Rightarrow t_{17} = t_1 + 16d = 10 + 16(2) = 42$$

۱۱۱. گزینه «۴»

$$a_{2n+1} - 2a_n = -5 \Rightarrow (a_1 + (2n+1-1)d) - 2(a_1 + (n-1)d) = -5 \Rightarrow 2d - a_1 = -5 \Rightarrow a_1 - 2d = 5 \quad (1)$$

$$a_5 = 15 \Rightarrow a_1 + 4d = 15 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - 2d = 5 \\ a_1 + 4d = 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} a_1 = \frac{25}{3}, \ d = \frac{5}{3}$$

۱۱۲. گزینه «۳»

نکته اگر مجموع سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی در سؤال داده شده، جملات دنباله را به شکل $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم.

یعنی زاویهٔ وسطی باید 60° باشد.

$$a - d + a + a + d = 180^\circ \Rightarrow 3a = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$$

۱۱۳. گزینه «۲»

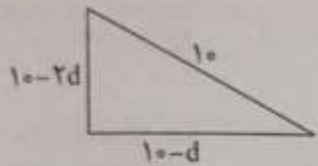
چون مجموع پنج جملهٔ متوالی داده شده است، آن‌ها را به صورت $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ در نظر می‌گیریم.

چون مجموع زوایای داخلی پنج ضلعی برابر $(5-2) \times 180 = 540^\circ$ است می‌نویسیم:

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 540 \Rightarrow 5a = 540 \Rightarrow a = 108$$

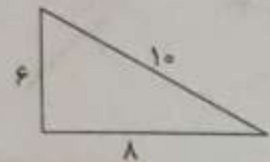
$$\text{کوچکترین زاویه} = a - 2d = 80 \Rightarrow 108 - 2d = 80 \Rightarrow d = 14^\circ$$

۱۱۴. گزینه «۱»



اضلاع را از کوچک به بزرگ $10-2d$ و $10-d$ و 10 در نظر می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} 100=(10-2d)^2+(10-d)^2 \Rightarrow d=2$$

$\Rightarrow$ 

$$\Rightarrow S_{\Delta}=\frac{6\times 8}{2}=24$$

۱۱۵. گزینه «۳»

$$a_1=13+4=17$$

$$a_n=17+(n-1)\times 4=4n+13 \Rightarrow 45=4n+13 \Rightarrow n=8$$

۱۱۶. گزینه «٤»

$$a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=55 \Rightarrow 5a_1+10d=55 \Rightarrow a_1+2d=11$$

$$\text{جمله وسط} = \text{جمله سوم} = a_3=a_1+2d=11$$

۱۱۷. گزینه «۲»

$$a_1+a_1+d+a_1+2d=6 \Rightarrow 3a_1+3d=6 \Rightarrow a_1+d=2 \qquad (1)$$

$$a_1+3d+a_1+4d+a_1+5d=42 \Rightarrow 3a_1+12d=42 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \begin{cases} a_1+d=2 \\ a_1+4d=14 \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} d=4,\ a_1=-2 \Rightarrow a_{10}=a_1+9d=(-2)+9(4)=34$$

۱۱۸. گزینه «۱»

$$\begin{cases} a_7=a_1+6d=n \\ a_n=7 \Rightarrow a_1+(n-1)d=7 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 7d-nd=n-7 \Rightarrow d=-1$$

$$a_{n+7}=a_1+(n+6)d=\underbrace{a_1+6d}_{n}+nd \overset{d=-1}{=\!=} n-n=0$$

۱۱۹. گزینه «۲»

$$a_6-a_2=4d \Rightarrow 2n+1-n=4d \Rightarrow n+1=4d$$

$$a_{12}-a_6=6d \Rightarrow 4n-1-2n-1=6d \Rightarrow 2n-2=6d \Rightarrow n-1=3d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1=4d \\ n-1=3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-4d=-1 \\ n-3d=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} d=2,\ n=7 \Rightarrow a_2=7 \Rightarrow a_1+d=7 \Rightarrow a_1+2=7 \Rightarrow a_1=5$$

$$a_n=a_7=a_1+6d=5+6(2)=17$$

۱۲۰. گزینه «۲»

$$\begin{matrix} a_3=b_6 \\ a_9=b_m \\ a_{18}=b_k \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b_m-b_6=a_9-a_3=(a_1+8d)-(a_1+2d)=6d \\ b_k-b_6=a_{18}-a_3=(a_1+17d)-(a_1+2d)=15d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b_m-b_6}{m-6}=\frac{b_k-b_6}{k-6} \Rightarrow \frac{b_m-b_6}{b_k-b_6}=\frac{m-6}{k-6}=\frac{6d}{15d} \Rightarrow \frac{m-6}{k-6}=\frac{2}{5}$$

پس باید $m-6$ ضریبی از ۲ و $k-6$ ضریبی از ۵ باشد. پس برای می‌نیمم بودن m و k داریم:

$$\begin{matrix} m-6=2 \Rightarrow m=8 \\ k-6=5 \Rightarrow k=11 \end{matrix} \Rightarrow m+k=19$$

۱۲۱. گزینه «۴»

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

هریک از کسرها را گویا می‌کنیم، تفاضل جملات متوالی برابر قدر نسبت d است.

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\dots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{(n-1)d}{d(13+2)}=\frac{n-1}{15}$$

۱۲۲. گزینه «۱»

$$a_5=(a_n)^2\Rightarrow a_1q^4=(a_1q^{n-1})^2\Rightarrow a_1q^4=a_1^2q^{2n-2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 1=a_1q^{2n-6}\\ \text{از طرفی } a_{15}=1\Rightarrow a_1q^{14}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{a_1}q^{14}=\cancel{a_1}q^{2n-6}\Rightarrow 2n-6=14\Rightarrow n=10$$

۱۲۳. گزینه «۲»

سه عدد را $a-d,a,a+d$ فرض می‌کنیم.

$$(a-d)+a+(a+d)=15\Rightarrow 3a=15\Rightarrow a=5\Rightarrow (a-d)\times a\times(a+d)=105\Rightarrow a(a^2-d^2)=105$$

$$\xrightarrow{a=5}5(25-d^2)=105\Rightarrow 25-d^2=21\Rightarrow d=\pm 2$$

پس جملات دنباله عبارتند از:

$$\left\{\begin{array}{l}d=-2\Rightarrow 7,5,3\\ d=2\Rightarrow 3,5,7\end{array}\right.\Rightarrow 7-3=4$$

۱۲۴. گزینه «۲»

نکته در یک دنبالهٔ حسابی داریم:

اگر $m+n=p+q\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$

$$t_{18}^2-t_8^2=420\Rightarrow (t_{18}-t_8)(t_{18}+t_8)=420\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{t_{18}-t_8}{18-8}=d\Rightarrow t_{18}-t_8=10d\\ t_{18}+t_8=2t_{13}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow(10d)(2t_{13})=420\xrightarrow{t_{13}=7}140d=420\Rightarrow d=3$$

۱۲۵. گزینه «۲»

رشتهٔ داده شده را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $\frac{2}{1},\frac{6}{6},\frac{10}{11},\frac{14}{16},\frac{18}{21},\dots$

حال صورت و مخرج کسر را به صورت جداگانه الگویابی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{صورت کسر}: a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times4=4n-2\\ \text{مخرج کسر}: b_n=b_1+(n-1)d=1+(n-1)\times5=5n-4\end{array}\right\}$$

$$u_n=\frac{4n-2}{5n-4}\Rightarrow u_{20}=\frac{80-2}{100-4}=\frac{78}{96}=\frac{13}{16}$$

۱۲۶. گزینه «۴»

$$a_1=-188\ ,\ d=a_2-a_1=-179-(-188)=9$$

$$a_n=a_1+(n-1)d=-188+(n-1)9\Rightarrow a_n=-197+9n\Rightarrow a_n<0\Rightarrow 9n-197<0\Rightarrow 9n<197$$

$$\Rightarrow n<\frac{197}{9}\Rightarrow n<21/8\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n=1,2,3,\dots,21$$

۱۲۷ گزینه «۳»

$$\begin{cases} 2,5,8,11,\ldots \longrightarrow d_1 = 3 \\ 3,7,11,15,\ldots \longrightarrow d_2 = 4 \end{cases} \longrightarrow d = \text{ک.م.م}(4,3) = 12$$

در دنبالهٔ حسابی جدید که جمله‌های آن جملات مشترک دو دنباله هستند $a_1 = 11$ و $d = 12$ است. بنابراین جملهٔ عمومی آن به صورت زیر است:

$$a_n = 11 + (n-1)12 \Rightarrow a_n = 12n - 1 \Rightarrow a_n < 300 \Rightarrow 12n < 301 \Rightarrow n < 25/08 \xrightarrow{n \in N} n \le 25$$

یعنی ۲۵ جملهٔ مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ وجود دارد.

۱۲۸ گزینه «۱»

$$\begin{aligned} a_n &= 5n - 2 \Rightarrow a_n = 3,8,13,\ldots \Rightarrow d_1 = 5 \\ b_n &= 3n + 1 \Rightarrow b_n = 4,7,10,\ldots \Rightarrow d_2 = 3 \end{aligned} \longrightarrow d = 15$$

$\Rightarrow$ دنباله: $13, 28, \ldots$

$$C_n = 13 + (n-1)15 \Rightarrow C_9 = 13 + 8(15) = 133$$

۱۲۹ گزینه «۳»

$$\begin{aligned} a_n &= 2,7,12,\ldots \Rightarrow d_1 = 5 \\ b_n &= 8,11,14,\ldots \Rightarrow d_2 = 3 \end{aligned} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} d = 15$$

دنبالهٔ مشترک: $17, 32, \ldots \Rightarrow C_n = 17 + (n-1) \times 15 \Rightarrow C_n = 15n + 2$

$$100 \le C_n \le 999$$

$$\begin{cases} 15n + 2 \ge 100 \Rightarrow 15n \ge 98 \Rightarrow n \ge 6/53 \xrightarrow{n \in N} n \ge 7 \\ 15n + 2 \le 999 \Rightarrow 15n \le 997 \Rightarrow n \le 66/46 \xrightarrow{n \in N} n \le 66 \end{cases} \Rightarrow 7 \le n \le 66 \Rightarrow \text{تعداد} = 66 - 7 + 1 = 60$$

۱۳۰ گزینه «۳»

نکته تعداد اعداد بخش‌پذیر بر K از ۱ تا n برابر است با خارج‌قسمت تقسیم n بر K.

(تعداد اعداد ۱ تا ۹۹ بخش‌پذیر بر ۵) − (تعداد اعداد ۱ تا ۹۹۹ بخش‌پذیر بر ۵) = تعداد اعداد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵

$$= 999 \div 5 \to 199 \quad - \quad 99 \div 5 \to 19 \Rightarrow 199 - 19 = 180$$

۱۳۱ گزینه «۴»

اولین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۱۱ باقی‌مانده ۴ دارد عدد ۴ است. اعداد بعدی ۱۵، ۲۶، ... هستند که در واقع دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۴ و قدر نسبت ۱۱ می‌سازند.

$$a_n = 4 + (n-1)(11) = 4 + 11n - 11 = 11n - 7 < 300 \Rightarrow 11n < 307 \Rightarrow n < \frac{307}{11} \Rightarrow n < 27/9 \Rightarrow n \le 27$$

۱۳۲. گزینه «۲»

نکته مجموع n جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی از $a_۱$ تا a_n برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$$

$S_n=na_۱+\frac{n}{۲}(n-۱)d=na_۱+\frac{d}{۲}n^۲-\frac{d}{۲}n\Rightarrow S_n=\frac{d}{۲}n^۲+(a_۱-\frac{d}{۲})n\Rightarrow$ ضریب $n^۲$ = نصف قدر نسبت دنباله

۱۳۳. گزینه «۲»

$$a_n=\frac{۳}{۲}n-۵\Rightarrow a_۱=\frac{۳}{۲}(۱)-۵=-\frac{۷}{۲}\ ,\ a_۲=\frac{۳}{۲}(۲)-۵=-۲\Rightarrow d=a_۲-a_۱=-۲-(-\frac{۷}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}[۲(-\frac{۷}{۲})+(۱۵-۱)(\frac{۳}{۲})]=۱۰۵$$

۱۳۴. گزینه «۱»

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲a_۱+۹d]=۱۰a_۱+۴۵d$$

$$S'_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d']\Rightarrow S'_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲a_۱+۹(d+۲)]=۱۰a_۱+۴۵d+۹۰\Rightarrow S'_{۱۰}-S_{۱۰}=۹۰$$

۱۳۵. گزینه «۱»

$$۳/۹,۱۳/۷,۲۳/۵,...\Rightarrow d=۱۳/۷-۳/۹=۹/۸\Rightarrow S_۶=\frac{۶}{۲}[۲(۳/۹)+۵(۹/۸)]=۱۷۰/۴$$

۱۳۶. گزینه «۳»

$$a_۷+a_{۱۱}+a_{۱۵}=۵۴\Rightarrow a_۱+۶d+a_۱+۱۰d+a_۱+۱۴d=۵۴\Rightarrow ۳a_۱+۳۰d=۵۴\Rightarrow a_۱+۱۰d=۱۸$$

$$S_{۲۱}=\frac{۲۱}{۲}[۲a_۱+۲۰d]=\frac{۲۱}{۲}[۲(a_۱+۱۰d)]=\frac{۲۱}{۲}[۲\times۱۸]=۳۷۸$$

۱۳۷. گزینه «۴»

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d_۱)}{\frac{n}{۲}(۲a_۲+(n-۱)d_۲)}=\frac{۲a_۱+(n-۱)d_۱}{۲a_۲+(n-۱)d_۲}$$

از طرفی نسبت جملات نهم دو دنباله برابر است با:

$$\frac{a_۱+۸d_۱}{a_۲+۸d_۲}=\frac{۲a_۱+۱۶d_۱}{۲a_۲+۱۶d_۲}\qquad(۲)$$

برای به‌دست آوردن نسبت (۲) کافی است در نسبت (۱) $n=۱۷$ قرار دهیم. سپس برای به‌دست آوردن این رابطه می‌توان نوشت:

$$\frac{a_۹}{a'_۹}=\frac{۵(۱۷)+۳}{۷(۱۷)+۹}=\frac{۸۸}{۱۲۸}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۳۸ گزینه «۴»

$S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(۲a_۱+۱۰d)=۱۱(a_۱+۵d) \qquad (۱)$

$a_۱+۲d=۲۰ \qquad (۲)$

از طرفی $a_۳=۲۰$ بنابراین:

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم:

$$S_{۱۱}=۱۱[۲۰+۳d] \xrightarrow[\text{مربع کامل}]{S_{۱۱}} ۲۰+۳d=۱۱ \Rightarrow d=-۳ \Rightarrow a_۱+۲d=۲۰ \Rightarrow a_۱+۲(-۳)=۲۰ \Rightarrow a_۱=۲۶$$

$$\Rightarrow a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۲=۲۶-۳n+۳ \Rightarrow n=۹$$

۳۹ گزینه «۳»

با تعریفی که برای هر دسته در صورت مسأله ارائه شده است، دستهٔ دهم دنباله‌ای به صورت $\{a_n\}=\{۸۲,۸۳,...,۱۰۰\}$ که یک تصاعد حسابی متناهی با جملهٔ اول $a_۱=۸۲$ و قدر نسبت $d=۱$ و جملهٔ آخر $a_{۱۹}=۱۰۰$ می‌باشد. پس مجموع این ۱۹ جمله برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}[a_۱+a_n] \Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}[۸۲+۱۰۰]=۱۷۲۹$$

۴۰ گزینه «۳»

جملهٔ اول هر دسته از رابطهٔ $a_n=n(n-۱)+۱$ و جملهٔ آخر هر دسته از رابطهٔ $b_n=n(n+۱)-۱$ به‌دست می‌آید. پس:

$$a_n+b_n=n(n-۱)+۱+n(n+۱)-۱=۲n^۲ \Rightarrow a_{۳۰}+b_{۳۰}=۲\times(۳۰)^۲=۱۸۰۰$$

۴۱ گزینه «۱»

جملهٔ اول هر دسته از رابطهٔ $a_n=\frac{n(n-۱)}{۲}+۱$ و جملهٔ آخر هر دسته از رابطهٔ $b_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ به‌دست می‌آید.

$$\text{جملهٔ اول دستهٔ بیستم}=\frac{۲۰(۱۹)}{۲}+۱=۱۹۱$$

$$\text{جملهٔ آخر دستهٔ بیستم}=\frac{۲۰(۲۱)}{۲}=۲۱۰$$

بنابراین جملات دستهٔ بیستم $(۱۹۱,۱۹۲,...,۲۱۰)$ هستند که تعداد آن‌ها $n=۲۱۰-۱۹۱+۱=۲۰$ می‌باشد. پس:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[a_۱+a_{۲۰}]=\frac{۲۰}{۲}[۱۹۱+۲۱۰]=۴۰۱۰$$

۴۲ گزینه «۴»

$$S_n=\frac{n(n-۳)}{۴}$$

$$S_{۳۵}-S_{۲۴}=\frac{۳۵(۳۲)}{۴}-\frac{۲۴(۲۱)}{۴}=۲۸۰-۱۲۶=۱۵۴$$

۴۳ گزینه «۲»

$$\begin{cases} S_{۲۰}=۳S_{۱۲} \\ a_۳=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=۳\times\frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d) \\ a_۱+۲d=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a_۱+d=۰ \\ a_۱+۲d=۶ \end{cases} \Rightarrow a_۱=-۲\ ,\ d=۴ \Rightarrow a_{۱۰}=a_۱+۹d=-۲+۹(۴)=۳۴$$

۱۴۴. گزینه «۱»

اگر قدر نسبت این دنبالهٔ عددی را d در نظر بگیریم جملات ردیف فرد یک دنبالهٔ عددی با قدرنسبت ۲d تشکیل می‌دهند. (جملات ردیف زوج نیز همین‌طور) بنابراین با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$ داریم:

$$\overbrace{a_۱ + a_۳ + ... + a_{۱۹}}^{\text{۱۰ تا جمله}} = \frac{۱۰}{۲}[۲a_۱ + ۹(۲d)] = ۱۳۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲a_۱ + ۱۸d = ۲۷ \\ ۲a_۲ + ۱۸d = ۳۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲(a_۲ - a_۱) = ۳$$

$$\underbrace{a_۲ + a_۴ + ... + a_{۲۰}}_{\text{۱۰ تا جمله}} = \frac{۱۰}{۲}[۲a_۲ + ۹(۲d)] = ۱۵۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_۲ - a_۱ = \frac{۳}{۲} \xrightarrow[d=\frac{۳}{۲}]{۲a_۱+۱۸d=۲۷} a_۱ = ۰$$

۱۴۵. گزینه «۲»

$$(a_{۱۳} + a_{۱۴} + a_{۱۵} + a_{۱۶}) - (a_۵ + a_۶ + a_۷ + a_۸) = (a_{۱۳} - a_۵) + (a_{۱۴} - a_۶) + (a_{۱۵} - a_۷) + (a_{۱۶} - a_۸)$$

$$= ۸d + ۸d + ۸d + ۸d = ۳۲d = ۳۲(a_۲ - a_۱) = ۳۲(۲) = ۶۴$$

۱۴۶. گزینه «۱»

$$a_۴ . a_۶ = ۱ \Rightarrow (a_۵ - d)(a_۵ + d) = ۱ \Rightarrow a_۵^۲ - d^۲ = ۱ \qquad (۱)$$

$$a_۵^۲ + d^۲ = ۵ \quad (۲) \xrightarrow{(۲),(۱)} \begin{cases} a_۵^۲ - d^۲ = ۱ \\ a_۵^۲ + d^۲ = ۵ \end{cases} \longrightarrow ۲d^۲ = ۴ \Rightarrow d^۲ = ۲ \Rightarrow d = \pm\sqrt{۲}$$

۱۴۷. گزینه «۴»

$$a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳ \Rightarrow a_۱ + ۶d = \frac{۱}{۲}(a_۱ + ۲d) \Rightarrow a_۱ = -۱۰d \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] = \frac{n}{۲}[۲(-۱۰d) + (n-۱)d] = ۰$$

$$\Rightarrow -۲۰d + nd - d = ۰ \Rightarrow d(-۲۰ + n - ۱) = ۰ \Rightarrow \xrightarrow{\text{چون } d \neq ۰} -۲۱ + n = ۰ \Rightarrow n = ۲۱$$

۱۴۸. گزینه «۳»

$$S_۵ = \frac{۱}{۳}(S_{۱۰} - S_۵) \Rightarrow S_{۱۰} = ۴S_۵ \Rightarrow \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۴(\frac{۵}{۲})(۲a_۱ + ۴d) \Rightarrow ۲a_۱ + ۹d = ۴a_۱ + ۸d$$

$$\Rightarrow ۲a_۱ - d = ۰ \Rightarrow d = ۲a \Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۱ + d}{a_۱} = \frac{۳a_۱}{a_۱} = ۳$$

۱۴۹. گزینه «۴»

$$S_n = \frac{n}{۲}(a + L) \Rightarrow ۶۸۰ = \frac{n}{۲}(۵۰ + ۳۰) \Rightarrow ۶۸۰ = ۴۰n \Rightarrow n = ۱۷$$

۱۵۰. گزینه «۴»

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ = ۱۵ \\ a_{n-۱} + a_n = ۳۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ + a_۱ + d = ۱۵ \\ a_۱ + (n-۱-۱)d + a_۱ + (n-۱)d = ۳۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع تساوی‌ها}} ۴a_۱ + ۲(n-۱)d = ۵۰ \Rightarrow ۲a_۱ + (n-۱)d = ۲۵$$

$$S_n = ۵۲۵ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] = ۵۲۵ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۲۵] = ۵۲۵ \Rightarrow n = ۴۲$$

۱۵۱. گزینه «۳»

مجموع اعداد ردیف اول $=\dfrac{(1+n)n}{2}$

مجموع اعداد ردیف دوم $=\dfrac{(2+2n)n}{2}=\dfrac{(1+n)2n}{2}$

$\vdots$

مجموع اعداد ردیف nاُم $=\dfrac{(n+n^2)n}{2}=\dfrac{(1+n)n^2}{2}$

مجموع کل اعداد مندرج $=\dfrac{n}{2}(n+1)(1+2+3+\dots+n)=\dfrac{n}{2}(n+1).\dfrac{n}{2}(n+1)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

۱۵۲. گزینه «۳»

$$18,27,\dots,99 \Rightarrow a_1=18, d=9, n=\frac{99-18}{9}+1=10 \Rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}[2(18)+9(9)]=585$$

۱۵۳. گزینه «٤»

اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۶ از ۱۰۰ تا ۲۰۰ به شکل زیر خواهد بود که دنباله‌ای حسابی است.

$102,108,\dots,198$

$$a_1=102, d=6, n=\frac{198-102}{6}+1=17 \Rightarrow S_{17}=\frac{17}{2}[2(102)+16(6)]=2550$$

۱۵٤. گزینه «۳»

$3,9,15,\dots,99$

$$a_1=3, d=6, n=\frac{99-3}{6}+1=17$$

$$S_{17}=\frac{17}{2}[2(3)+16(6)]=867$$

۱۵۵. گزینه «٤»

کافی است مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۲ را با مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۵ جمع کنیم و از دو برابر مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۱۰ کم کنیم.

$$\left.\begin{aligned} &2+4+\dots+100=\frac{(2+100)50}{2}=2550\\ &5+10+\dots+100=\frac{(5+100)20}{2}=1050\\ &10+20+\dots+100=\frac{(10+100)10}{2}=550 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2550+1050-2(550)=2500$$

۱۵۶. گزینه «٤»

تعریف دنباله‌ی هندسی: یک دنباله از اعداد که در آن از جمله‌ی دوم به بعد هر جمله از ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت به‌دست می‌آید.

گزینه «۱» دنباله هندسی با $q=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ است.

گزینه «۲» دنباله‌ی هندسی با $q=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ است.

گزینه «۳» دنباله‌ی هندسی با $q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ است.

گزینه‌ی «۴» دنباله‌ی هندسی نمی‌باشد.

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\neq\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

۱۵۷. گزینه «۱»

نکته سه جمله‌ی متوالی a و b و c تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند هرگاه $b^2 = ac$.

$$b^2 = 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$\begin{cases} b = 4 \Rightarrow 2, 2\sqrt{2}, 4 & \text{صعودی (غ‌قق)} \\ b = -4 \Rightarrow -2, 2\sqrt{2}, -4 & \text{غیرصعودی (قق)} \end{cases}$$

۱۵۸. گزینه «۱»

نکته اگر بین a و b ، m واسطه‌ی هندسی درج کنیم، در این صورت $|q| = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

$$q = \sqrt[4]{\frac{\frac{81}{2}}{8}} = \sqrt[4]{(\frac{3}{2})^4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_2 = a_1 q = 8(\frac{3}{2}) = 12$$

۱۵۹. گزینه «۳»

$$a_1 = 2, a_8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow a_1 q^7 = 16\sqrt{2} \Rightarrow 2q^7 = 16\sqrt{2} \Rightarrow q^7 = 8\sqrt{2} = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$2, \underbrace{2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16}_{\text{۶ واسطهٔ هندسی}}, 16\sqrt{2} \Rightarrow \text{مجموع ۸ عدد فوق} = 30(1+\sqrt{2})$$

۱۶۰. گزینه «۲»

دنباله‌ی داده شده یک دنباله‌ی هندسی است. پس:

$$q = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{3}{2}\times(\frac{2}{3})^{n-1} = (\frac{2}{3})^{-1}\times(\frac{2}{3})^{n-1} = (\frac{2}{3})^{n-2} \Rightarrow (\frac{2}{3})^{n-2} > \frac{64}{729} \Rightarrow (\frac{2}{3})^{n-2} > (\frac{2}{3})^6$$

$$n-2 < 6 \Rightarrow n < 8 \Rightarrow n \le 7$$

۱۶۱. گزینه «٤»

$$a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} \Rightarrow a_1 q^4 = \frac{a_1 q^2 + a_1 q^3}{2} \Rightarrow 2q^4 = q^2 + q^3 \Rightarrow 2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۶۲. گزینه «۲»

نکته در دنباله‌ی هندسی اگر $m+n = p+q$ آن‌گاه $a_m \times a_n = a_p \times a_q$

$$6 + 14 = 8 + 12 \Rightarrow a_6 \times a_{14} = a_8 \times a_{12} \Rightarrow 2\times 16 = 8\times a_8 \Rightarrow a_8 = 4$$

۱۶۳. گزینه «۳»

اگر سه جمله‌ی متوالی را a_1, a_1q, a_1q^2 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 21 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{q^2+q+1}{a_1 q^2} = \frac{7}{12}$$

پس خواهیم داشت:

$$q^2 + q + 1 = \frac{7}{12} a_1 q^2 \Rightarrow a_1(q^2+q+1) = \frac{7}{12} a_1^2 q^2 \Rightarrow a_1^2 q^2 = 36 \Rightarrow a_1 q = 6$$

پس $\frac{7}{12} = \frac{q^2+q+1}{6q}$ یا $2q^2 - 5q + 2 = 0$ پس $q = 2, \frac{1}{2}$ درنتیجه عدد بزرگ‌تر ۱۲ می‌باشد.

۱۶۴. گزینه «۲»

اگر دنباله‌ی هندسی را به صورت $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

گزینه «۱» درست است چون در این‌صورت: $a_1k, a_1kq, a_1kq^2, \dots \Rightarrow q' = kq$

گزینه «۳» درست است، چون $a_1^2, (a_1q)^2, (a_1q^2)^2, \dots \Rightarrow q' = q^2$

گزینه «۴» درست است، چون در این‌صورت $q' = q + k$

امّا گزینه «۲» نادرست است برای مثال نقض دنباله‌ی $2, 6, 18, \dots$ را در نظر می‌گیریم و همه‌ی جملات را با ۱ جمع می‌کنیم، آن‌گاه:

$$3, 7, 19, \dots \Rightarrow \frac{7}{3} \neq \frac{19}{7}$$

۱۶۵. گزینه «۲»

$$\begin{matrix} a_n = a_1q^{n-1} \\ b_n = b_1p^{n-1} \end{matrix} \Rightarrow C_n = a_n \cdot b_n = a_1q^{n-1}b_1p^{n-1} = a_1b_1(qp)^{n-1}$$

برای رد سایر موارد $a_n = 2^n$ و $b_n = 3^n$ در نظر می‌گیریم.

۱۶۶. گزینه «۲»

$$a_1 = 1,\ q = 3^{-1} \Rightarrow a_{n+m} \times a_{n-m} = a_1q^{n+m-1} \times a_1q^{n-m-1} = a_1^2q^{2n-2} = 1^2 \times 3^{-2n+2} = (3^2)^{-n+1} = 9^{1-n}$$

۱۶۷. گزینه «۳»

$$\frac{a_6}{a_2} = -\frac{1}{81} \Rightarrow \frac{a_1q^5}{a_1q} = -\frac{1}{81} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{81} \xrightarrow{q<0} q = -\frac{1}{3}$$

$$a_3 = a_1q^2 \Rightarrow 9 = a_1(-\frac{1}{3})^2 \Rightarrow 9 = \frac{1}{9}a_1 \Rightarrow a_1 = 81$$

۱۶۸. گزینه «۱»

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \dots \Rightarrow q_1 = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{8}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{72}, \dots \Rightarrow q_2 = \frac{-\frac{1}{24}}{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$$

جمله‌ی هفتم دنباله اول همان جمله‌ی سیزدهم دنباله‌ی اصلی است.

جمله‌ی هفتم دنباله‌ی دوم همان جمله‌ی چهاردهم دنباله‌ی اصلی است.

$$\left.\begin{matrix} b_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow b_7 = \frac{1}{4}(\frac{1}{3})^{7-1} = \frac{1}{4} \times (\frac{1}{3})^6 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{729} = \frac{1}{2916} = a_{13} \\ C_1 = -\frac{1}{8} \Rightarrow C_7 = \frac{1}{8}(\frac{1}{3})^{7-1} = -\frac{1}{8}(\frac{1}{3})^6 = -\frac{1}{8} \times \frac{1}{729} = \frac{-1}{5832} = a_{14} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{13} + a_{14} = \frac{1}{5832}$$

۱۶۹. گزینه «۳»

$$a_1 + a_2 + a_3 = 4 \Rightarrow (a_1 + a_1q + a_1q^2 = 4) \qquad (1)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 \Rightarrow 256 \Rightarrow a_1q^6 + a_1q^7 + a_1q^8 = 256 \Rightarrow a_1q^6(1 + q + q^2) = 256 \xrightarrow{(1)} q^6 \times 4 = 256 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = \pm 2$$

۱۷۰. گزینه «۳»

$$a_1a_3=a_2^2=4\Rightarrow a_2=\pm 2\ ,\ a_3a_5=a_4^2=16\Rightarrow a_4=\pm 4$$

اگر $\begin{cases} a_2=2\ ,\ a_4=4 \Rightarrow q=\sqrt[3]{2} \\ a_2=-2\ ,\ a_4=-4\Rightarrow q=\sqrt[3]{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ ۱ دسته جواب

اگر $\begin{cases} a_2=2\ ,\ a_4=-4\Rightarrow q=-\sqrt[3]{2} \\ a_2=-2\ ,\ a_4=4\Rightarrow q=-\sqrt[3]{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ ۱ دسته جواب

۱۷۱. گزینه «۲»

$$a_5=\frac{a_3+a_4}{2}\Rightarrow 2a_5=a_3+a_4\Rightarrow 2a_1q^4=a_1q^2+a_1q^3\Rightarrow 2q^2=1+q\Rightarrow 2q^2-q-1=0\Rightarrow\begin{cases}q=1\\ q=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

۱۷۲. گزینه «٤»

$$\begin{array}{l}a_3=a_1q^2=3\\ a_5=a_1q^4=12\end{array}\xrightarrow{\text{با تقسیم تساوی‌ها}}q^2=4\Rightarrow q=\pm 2\Rightarrow a_1=\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\dfrac{3}{4}\times 2^{n-1}=3\times 2^{n-3}\\ a_n=\dfrac{3}{4}\times(-2)^{n-1}=3\times(-2)^{n-3}\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینیم در هر دو حالت هر جمله باید مضرب ۳ باشد که در گزینه «۴» این چنین نیست.

۱۷۳. گزینه «۲»

$$a_2+a_3=8\Rightarrow a_1q+a_1q^2=8\Rightarrow a_1q(1+q)=8\qquad(1)$$

$$a_1.a_1q.a_1q^2=1\Rightarrow a_1^3q^3=1\Rightarrow(a_1q)^3=1\Rightarrow a_1q=1\xrightarrow{\text{با جایگذاری در (1)}}1+q=8\Rightarrow q=7\Rightarrow a_1=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{1}{7}+1+\frac{1}{7}\times 49=\frac{57}{7}$$

۱۷٤. گزینه «۲»

نکته اگر حاصل‌ضرب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی داده شده باشد، آن سه جمله را به شکل $\frac{a}{q},a,aq$ در نظر می‌گیریم.

حاصل‌ضرب سه جمله $=216\Rightarrow\frac{a}{q}\times a\times aq=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$

مجموع سه جمله $=19\Rightarrow\frac{6}{q}+6+6q=19\Rightarrow 6+6q+6q^2=19q\Rightarrow 6q^2-13q+6=0\Rightarrow q=\frac{3}{2},\frac{2}{3}$

$\begin{cases}q=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 4,6,9\\ q=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 9,6,4\end{cases}$ $\Rightarrow$ تفاضل بزرگ‌ترین و کوچکترین $=9-4=5$

۱۷۵. گزینه «٤»

$$a_4+a_5=4/5(a_6+a_7)\Rightarrow a_1q^3+a_1q^4=\frac{9}{2}(a_1q^5+a_1q^6)\Rightarrow a_1q^3(1+q)=\frac{9}{2}\times a_1q^5(1+q)\xrightarrow{q\neq -1}1=\frac{9}{2}\times q^2$$

$$\Rightarrow q^2=\frac{2}{9}\Rightarrow q=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$a_2=2\Rightarrow a_1q=2\Rightarrow a_1\times\frac{\sqrt{2}}{3}=2\Rightarrow a_1=2\times\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow a_1=3\sqrt{2}$$

۱۷۶. گزینه «۳»

قیمت دوچرخه یک دنباله‌ی هندسی با $a_1=300$ و $q=\frac{9}{10}$ است. بنابراین $a_n=300(\frac{9}{10})^n$

۱۷۷. گزینه «۲»

اگر جملات دنباله‌ی هندسی به شکل $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$ باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases}a_1+a_1q^3=13\\a_1q+a_1q^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(1+q^3)=13\\a_1q(1+q)=4\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین}}\frac{1+q^3}{q(1+q)}=\frac{13}{4}\Rightarrow\frac{\cancel{(1+q)}(1+q^2-q)}{q\cancel{(1+q)}}=\frac{13}{4}\Rightarrow 4-4q+4q^2=13q$$

$$\Rightarrow 4q^2-17q+4=0\Rightarrow q=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}=\frac{17\pm15}{8}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}q=4\\q=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow \text{مقدار بزرگ‌تر } q=4$$

۱۷۸. گزینه «۳»

فرض کنیم تعداد جملات $n=2$ باشد. پس:

$$\begin{aligned}&\text{مجموع تمام جملات}=a_1+a_2\\&\text{مجموع جملات با ردیف فرد}=a_1\end{aligned}\xrightarrow{\text{فرض}}a_1+a_2=3a_1\Rightarrow a_2=2a_1\Rightarrow\frac{a_2}{a_1}=2$$

بنابراین قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی $q=2$ است.

۱۷۹. گزینه «۲»

اگر این کوه در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست دهد پس در هر روز $\frac{4}{5}$ وزن خود را حفظ می‌کند بنابراین وزن باقی‌مانده‌ی کوه، دنباله‌ی هندسی با $a_1=100$ و $q=\frac{4}{5}$ است.

$$a_n=100\times(\frac{4}{5})^n\Rightarrow a_5=100\times(\frac{4}{5})^5=32/768$$

بنابراین حدود $\frac{1}{3}$ وزن آن باقی می‌ماند.

۱۸۰. گزینه «۳»

در پایان هر سال سرمایه در $1+0/20=1/2$ ضرب می‌شود. پس از ۴ سال مبلغ پس‌انداز برابر است با: $5000\times(1/2)^4=10368$

۱۸۱. گزینه «۲»

> **نکته** حاصل‌ضرب n جمله‌ی متساوی‌الفاصله از یک دنباله‌ی هندسی که n عددی فرد است، برابر است با جملهٔ وسط به توان n

جمله‌ی $k+1$اُم از یک دنباله‌ی $2k+1$ جمله‌ای یعنی جمله وسط. بنابراین:

$$\text{جمله‌ی وسط}=p\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب } 2k+1 \text{ جمله}=(\text{جمله وسط})^{2k+1}=p^{2k+1}$$

۱۸۲. گزینه «۱»

$$a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_9=8\Rightarrow a_1\times a_1q\times a_1q^2\times\ldots\times a_1q^8=8\Rightarrow a_1^9\times q^{1+2+\ldots+8}=8\Rightarrow a_1^9.q^{36}=8\Rightarrow(a_1q^4)^9=8$$

$$\Rightarrow a_1q^4=\sqrt[9]{8}\Rightarrow a_1q^4=\sqrt[9]{2^3}\Rightarrow a_1q^4=\sqrt[3]{2}\quad(1)$$

$$a_2.a_4.a_6.a_8=a_1q.a_1q^3.a_1q^5.a_1q^7=a_1^4.q^{16}=(a_1q^4)^4\overset{(1)}{=\!=}(\sqrt[3]{2})^4=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3\times2}=2\sqrt[3]{2}$$

۱۸۳. گزینه «۴»

نکته مجموع n جمله از دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$(2x)^2=(x^2+4)(x^2-2)\Rightarrow4x^2=x^4+2x^2-8\Rightarrow x^4-2x^2-8=0$$

$$\xrightarrow{x^2=t}t^2-2t-8=0\Rightarrow\begin{cases}t=-2\Rightarrow x^2=-2 & \text{جواب ندارد.}\\ t=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2 \ \text{یا}\ x=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow 8,4,2,\ldots & \text{دنباله نزولی است (قق)}\\ x=-2\Rightarrow 8,-4,2,\ldots & \text{دنباله نانزولی است (غقق)}\end{cases}$$

$$S_7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8\times\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}}=\frac{127}{8}$$

۱۸۴. گزینه «۴»

$$a^2=4\times9\Rightarrow a=6$$

$$9^2=a\times b\Rightarrow81=6b\Rightarrow b=\frac{81}{6}=\frac{27}{2}$$

$$q=\frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow S_6=\frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}}=83\frac{1}{8}$$

۱۸۵. گزینه «۲»

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{1-q^8}{1-q^4}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4}=\frac{5}{4}\Rightarrow1+q^4=\frac{5}{4}\Rightarrow q^4=\frac{1}{4}\Rightarrow(q^4)^{\frac{3}{2}}=(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$$

$$q^6=\frac{1}{4}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

۱۸۶. گزینه «۳»

$$\begin{cases}S_9-S_6=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}-\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=135\Rightarrow\frac{a_1}{1-q}(1-q^9-1+q^6)=135 & (1)\\ S_6-S_3=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}-\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=5\Rightarrow\frac{a_1}{1-q}(1-q^6-1+q^3)=5 & (2)\end{cases}$$

از تقسیم رابطه‌ی (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{q^6-q^9}{q^3-q^6}=\frac{135}{5}=27\Rightarrow\frac{q^3(q^3-q^6)}{q^3-q^6}=27\Rightarrow q^3=27\Rightarrow q=3$$

۱۸۷. گزینه «۳»

$$9+99+999+\dots+\underbrace{999\dots9}_{\text{۹۹ مرتبه}}=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\dots+(10^{99}-1)=(10^1+10^2+10^3+\dots+10^{99})-\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\text{۹۹ مرتبه}}$$

$$=\frac{10(1-10^{99})}{1-10}-99=\frac{10-10^{100}}{-9}-99=\frac{10^{100}-10}{9}-99=\frac{10^{100}-901}{9}$$

۱۸۸. گزینه «۲»

صورت کسر به ازای $x=\sqrt{2}$ مجموع دنباله‌ای هندسی با ۱۴ جمله و $q=-\sqrt{2}$ می‌باشد. پس:

$$\frac{\frac{1(1-(-\sqrt{2})^{14})}{1-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-2^7}{-1}=\frac{2^7-1}{1}=128-1=127$$

۱۸۹. گزینه «۲»

در دنباله‌ی هندسی با سه جمله، $a_1=2$ و $S_3=26$ و جمله‌ها a_1,a_2,a_3 هستند.

در دنباله‌ی هندسی جدید با ۵ جمله داریم: a_1,t_1,a_2,t_2,a_3

$$S_3=\frac{2(1-q^3)}{1-q}=26\Rightarrow\frac{2(\cancel{1-q})(1+q+q^2)}{\cancel{1-q}}=26\Rightarrow q^2+q-12=0\Rightarrow\begin{cases}q=3 & (\text{ق ق})\\ q=-4 & (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

بنابراین سه جمله‌ی اول با توجه به $q=3$ برابر با $2,6,18$ هستند. درنتیجه:

$$t_1^2=a_1\times a_2=2\times6=12\Rightarrow t_1=2\sqrt{3}\Rightarrow \text{قدر نسبت دنباله‌ی جدید}=\frac{2\sqrt{3}}{a_1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{دنباله‌ی جدید}=2,2\sqrt{3},6,6\sqrt{3},18\Rightarrow \text{جواب}=26+8\sqrt{3}=2(13+4\sqrt{3})$$

۱۹۰. گزینه «۱»

$$\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\dots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}\times\frac{t-1}{t-1}\times\frac{t^3-1}{t^3-1}=\frac{(t-1)(t^{11}+t^{10}+\dots+t+1)(t^3-1)}{(t^3-1)(t^9+t^6+t^3+1)(t-1)}=\frac{(t^{12}-1)(t-1)(t^2+t+1)}{(t^{12}-1)(t-1)}=t^2+t+1$$

$$\xrightarrow{t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}t^2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\Rightarrow t^2+t=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}-1+\sqrt{5})=1\Rightarrow t^2+t+1=2$$

۱۹۱. گزینه «٤»

$$a_1+a_1q+a_1q^2=136\Rightarrow\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=136$$

$$a_1+a_1q+\dots+a_1q^5=153\Rightarrow\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=153\Rightarrow\frac{(1-q^6)}{1-q^3}=\frac{153}{136}\Rightarrow\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3}=\frac{153}{136}\Rightarrow1+q^3=\frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow q^3=\frac{17}{136}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_5}=\frac{a_1}{a_1\times q^4}=16$$

۱۹۲. گزینه «۲»

عبارت داده شده مجموع ۱۰ جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a^9 و قدر نسبت $-\frac{b}{a}$ است.

$$S=\frac{a^9(1-(-\frac{b}{a})^{10})}{1-(-\frac{b}{a})}=\frac{a^9-a^9(\frac{b^{10}}{a^{10}})}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a^9-\frac{b^{10}}{a}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{\frac{a^{10}-b^{10}}{a}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a^{10}-b^{10}}{a+b}$$

۱۹۳. گزینه «۲»

$$A=(1+x+...+x^8)(1-x+x^2-...+x^8)=\frac{x^9-1}{x-1}\times\frac{x^9+1}{x+1}=\frac{x^{18}-1}{x^2-1}\xrightarrow{x=\sqrt{2}}A=\frac{(x^2)^9-1}{x^2-1}=\frac{2^9-1}{2-1}=511$$

۱۹۴. گزینه «۲»

$$a_1=81a_1q^4\Rightarrow q^4=\frac{1}{81}\Rightarrow q=\frac{1}{3}\Rightarrow S_4=a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=a_1(1+q+q^2+q^3)\Rightarrow S_4=a_1(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27})=\frac{40}{27}a_1$$

$$\Rightarrow\frac{S_4}{a_4}=\frac{\frac{40}{27}\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}q^3}=\frac{\frac{40}{27}}{\frac{1}{27}}=40$$

۱۹۵. گزینه «۱»

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=5\frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}\Rightarrow 1=\frac{5}{1+q}\Rightarrow 1+q=5\Rightarrow q=4\Rightarrow\frac{\sqrt{a_1q^2.a_1q^8}}{a_1q^3}=\frac{a_1q^5}{a_1q^3}=q^2=4^2=16$$

۱۹۶. گزینه «۱»

$$\left.\begin{aligned}S_n&=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=1-2^{-n}\\S_{n-1}&=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{n-1})}{1-\frac{1}{2}}=1-2^{1-n}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{1-2^{1-n}}{1-2^{-n}}<\frac{99}{100}\Rightarrow 100-100\times2^{1-n}<99-99\times2^{-n}\Rightarrow 1<100(2^{1-n})-99(2^{-n})$$

$$\Rightarrow 1<2^{-n}(200-99)\Rightarrow 2^{-n}>\frac{1}{101}\Rightarrow\frac{1}{2^n}>\frac{1}{101}\Rightarrow 2^n<101\Rightarrow n_{max}=6$$

۱۹۷. گزینه «۱»

$$\frac{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1-q^n}{1-q^3}=4\in\mathbb{Z}$$

چون نسبت فوق برابر عددی صحیح است، پس $1-q^n$ باید بر $1-q^3$ بخش‌پذیر باشد و لازمه‌ی این کار این است که n مضرب صحیح ۳ باشد، پس $n=10$ نمی‌تواند باشد.

۱۹۸. گزینه «٤»

در مرحله‌ی اول شعاع دایره را برابر R در نظر می‌گیریم. در مرحله دوم شعاع هر یک از دو دایره‌ی رسم شده برابر $\frac{R}{2}$ و در مرحله سوم شعاع هریک از چهار دایره‌ی رسم شده $\frac{R}{4}$ است و ...

جمله اول : $S_1=\pi R^2$

جمله دوم : $S_2=2(\pi(\frac{R}{2})^2)=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{S_1}{2}$

جمله سوم : $S_3=4(\pi(\frac{R}{4})^2)=\frac{\pi R^2}{4}=\frac{S_1}{4}$

$\vdots$

جملات دنباله : $S_1,\frac{S_1}{2},\frac{S_1}{4},\frac{S_1}{8},...,\frac{S_1}{2^{n-1}},...\Rightarrow S_{100}=\frac{S_1}{2^{99}}=\frac{4\pi}{2^{99}}=\frac{\pi}{2^{97}}$

۱۹۹. گزینه «۳»

نکته در دنباله‌ی هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q ، اگر $|q|<1$ باشد، مجموع تمام جملات دنباله برابر است با: $S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$

$$q=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\times\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\Rightarrow q=3-2\sqrt{2}\Rightarrow|q|<1$$

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{3+2\sqrt{2}}{1-3+2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^3$$

۲۰۰. گزینه «٤»

$$x^2=(12+x)(8-x)\Rightarrow x^2=96-12x+8x-x^2\Rightarrow 2x^2+4x-96=0\Rightarrow x^2+2x-48=0\Rightarrow\begin{cases}x=-8\Rightarrow 4,-8,16,\ldots & \text{غ ق ق}\\ x=6\Rightarrow 18,6,2,\ldots & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{18}{1-\frac{1}{3}}=\frac{18}{\frac{2}{3}}=\frac{54}{2}=27$$